На правах рукописи

Красовский Андрей Андреевич

МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ С БЕСКОНЕЧНЫМ ГОРИЗОНТОМ

05.13.18 – Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ

А В Т О Р Е Ф Е Р А Т
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Екатеринбург – 2008

Работа выполнена в отделе динамических систем Института математики и механики Уральского отделения РАН

Научный руководитель: доктор физико-математических наук, профессор Тарасьев Александр Михайлович

Официальные оппоненты: член-корреспондент РАН, доктор физико-математических наук, профессор Ченцов Александр Георгиевич

доктор физико-математических наук, профессор Шориков Андрей Фёдорович

Ведущая организация: Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, г. Москва

Защита состоится 21 мая 2008 года в 15 часов на заседании диссертационного совета Д 212.286.10 по защите докторских и кандидатских диссертаций при Уральском государственном университете им. А.М. Горького по адресу: 620083, г. Екатеринбург, пр. Ленина, 51, ком. 248.

С диссертацией можно ознакомиться в Научной библиотеке Уральского государственного университета им. А.М. Горького.

Автореферат разослан “____” ______________ 2008 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета
доктор физ.-мат. наук, профессор В.Г. Пименов

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Представленная диссертация посвящена разработке методов решения задач оптимального управления с бесконечным горизонтом. Такие задачи составляют активно исследуемое направление прикладной математики. Актуальность этих задач мотивируется закономерностями развития и возможностями управления в экономических моделях. Особое внимание в диссертационной работе уделено исследованию достаточных условий оптимальности в принципе максимума Понтрягина. Основные результаты диссертации связаны с разработкой алгоритмов построения оптимальных траекторий в задачах с кусочно-определенными гамильтонианами и оценкой их точности. Важное место в работе уделяется задачам поиска оптимального времени остановки динамических процессов в многоуровневых моделях оптимизации. Все алгоритмы реализованы в компьютерных программах, которые были использованы при моделировании процессов экономического роста. Вычислительные эксперименты проведены на реальных эконометрических данных.

Актуальность темы

Теория управления и теория дифференциальных игр являются в настоящее время быстро развивающимися разделами современной математики, что вызвано потребностями многочисленных приложений в таких разнообразных дисциплинах как аэрокосмические науки, экономика, инженерные и технические науки, науки об окружающей среде, финансовая математика, гибридные системы, медицинские науки и науки о здравоохранении, вычислительные и компьютерные науки, океанографические, физические, общественные и математические науки. Возрастает интерес к теории оптимального управления и ее приложениям российских, немецких, французских, американских, японских и итальянских математиков, экономистов и специалистов по проблемам окружающей среды, а также международных научных организаций, что подтверждается увеличением количества работ в российских и зарубежных издательствах.

Основополагающее значение в теории оптимального управления имеет принцип максимума Л.С. Понтрягина [1], который получил развитие и приложение в работах российских и зарубежных математиков. Задачи управления в условиях неопределенности формализуются в рамках теории дифференциальных игр. Большое внимание в этом направлении уделяется исследованиям, связанным с развитием принципа экстремального прицеливания Н.Н. Красовского, в том числе, для построения оптимальных стратегий в сеточных схемах и для обобщения понятия стабильности. Развитие строгой теории задач конфликтного управления следует отнести к работам Н.Н. Красовского и А.И. Субботина [2].

Существенное влияние на теорию оптимального управления и теорию дифференциальных игр оказали работы Р.В. Гамкрелидзе, А.В. Кряжимского,

[1] *Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф.*, Математическая теория оптимальных процессов. М: Физматгиз, 1962. 392 с.

[2] *Красовский Н.Н., Субботин А.И.* Позиционные дифференциальные игры. М: Наука, 1974. 456 с.

А.Б. Куржанского, Е.Ф. Мищенко, Ю.С. Осипова, Б.Н. Пшеничного, Ф.Л. Черноусько, J.P. Aubin, T. Başar, R. Bellman, P. Bernhard, L. Berkovitz, A.E. Bryson, F.H. Clarke, M.G. Crandall, R.J. Elliot, L.C. Evans, W.H. Fleming, A. Friedman, Ho Yu-Chi, R. Isaacs, R.E. Kalman, V. Lakshmikantham, V.G. Leitman, P.L. Lions, P. Varaiya.

Большой вклад в их развитие внесли Э.Г. Альбрехт, А.В. Арутюнов, С.М. Асеев, В.Д. Батухтин, Ю.И. Бердышев, В.И. Благодатских, В.Г. Болтянский, С.А. Брыкалов, Ф.П. Васильев, Р.Ф. Габасов, Н.Л. Григоренко, М.И. Гусев, А.В. Дмитрук, В.И. Жуковский, С.Т. Завалищин, М.И. Зеликин, А.Д. Иоффе, Ф.М. Кириллова, А.В. Ким, А.Ф. Клейменов, А.Н. Красовский, Ю.С. Ледяев, Н.Ю. Лукоянов, В.И. Максимов, А.А. Меликян, А.А. Милютин, М.С. Никольский, О.И. Никонов, В.С. Пацко, Н.Н. Петров, Л.А. Петросян, В.Г. Пименов, А.Н. Сесекин, Н.Н. Субботина, А.М. Тарасьев, В.М. Тихомиров, Е.Л. Тонков, В.Е. Третьяков, В.И. Ухоботов, В.Н. Ушаков, Т.Ф. Филиппова, А.Г. Ченцов, А.А. Чикрий, А.Ф. Шориков, M. Bardi, E.N. Barron, I.C. Dolcetta, L. Cesari, M. Falcone, R. Jensen, M. Ishii, P.V. Kokotovic, G.J. Olsder, E. Roxin, P.E. Souganidis, J. Warga и многие другие ученые.

Получили развитие конструкции принципа максимума Понтрягина для задач управлений в новых постановках, в частности, для задач управления с бесконечным горизонтом. Такие постановки характерны для моделей экономического роста и задач финансовой математики. Отметим здесь работы С.М. Асеева и А.В. Кряжимского [3] по обобщениям принципа максимума для задач с бесконечным горизонтом, работы Г. Маурера по задачам оптимального управления с фазовыми ограничениями и их приложениям к задачам оптимизации инвестиционных процессов. Циклические управляемые процессы с целевыми функционалами, определяемыми как предельные значения усредненных по времени интегралов качества, рассматривались в работах В.И. Арнольда [4] и его учеников.

Исследуются достаточные условиям оптимальности для управляемых систем с вогнутыми гамильтонианами. Изучаются свойства, в частности, асимптотические свойства, решений гамильтоновых систем. Отметим здесь работы Т. Базара, Дж. Лейтмана, Р. Рокафеллара в приложении к исследованию динамических игр, в том числе, описывающих конкурентную рыночную среду.

Развиваются исследования минимаксных решений, понятие и конструкции которых введены А.И. Субботиным для корректного определения решений уравнений Гамильтона-Якоби, в задачах управления с нерегулярностями, в том числе, в сингулярно возмущенных задачах с малым параметром.

Теория оптимального управления и теория позиционных дифференциальных игр сближения-уклонения тесно связаны с теорией выживаемости, задачами построения и оценки множеств достижимости управляемых систем и

[3] *Асеев С.М., Кряжимский А.В.*, Принцип максимума Понтрягина и задачи оптимального экономического роста // Тр. МИАН, 2007. Т. 257. С. 5-271.

[4] *Arnold, V.I., Davydov A.A., Vassiliev V.A., Zakalyukin V.M.*, Mathematical Models of Catastrophes. Control of Catastrophic Processes // IIASA Reprint RP-06-007, from Encyclopedia of Life Support Systems (EOLSS), EOLSS Publishers, Oxford, UK, 2006. 46 P.

дифференциальных включений. В связи с этим отметим исследования А.Б. Куржанского, М.С. Никольского, Ф.Л. Черноусько и их сотрудников.

Теория выживаемости была развита в работах зарубежных математиков Ж.-П. Обэна, Х. Франковской, Г. Хаддада и других авторов. Эти работы посвящены задачам выживаемости управляемых систем на бесконечном промежутке времени при наличии стационарных фазовых ограничений. Значительные результаты по разработке аппроксимационных схем, направленных на приближенное вычисление ядер выживаемости и множеств достижимости, получены немецким математиком Ф. Колониусом.

Обширную область для приложений задачи оптимального управления и дифференциальные игр заняли при моделировании экономических процессов и в финансовом планировании. Среди известных работ в этом направлении следует упомянуть монографии лауреатов Нобелевской премии нескольких лет К. Эрроу [5], Л.В. Канторовича [6], Т. Шеллинга [7]. Особенное значение получили эти методы при построении моделей экономического роста. Пионерскими работами в этом направлении были работы Т. Купманса, Ф. Рамсея, Р. Солоу, К. Шелла. Последние монографии известных американских экономистов Дж. Гроссмана, И. Хелпмана [8], П. Кругмана, П. Нордхауса, Р. Барро, Д. Ромера и Ч. Джонса по эндогенной теории роста подтверждают важность теории оптимального управления для адекватного описания сбалансированных пропорций экономического развития. Кроме того, прикладными моделями теории дифференциальных игр и робастного управления занимаются такие известные американские специалисты по оптимальному управлению как Дж. Лейтман, Ф. Удвадиа в сотрудничестве с сильными экономистами из западноевропейских университетов Дж. Дози, Л. Ламбертини, К. Дейссенбергом. Разработке моделей технологического развития и их эконометрическому анализу посвящены работы группы экономистов из Токийского института технологий, возглавляемой Ч. Ватанабе [9]. Модели макроэкономического развития и эндогенного экономического роста получили развитие в трудах группы экономистов под руководством Р. Айреса [10] из Международной бизнес-школы (INSEAD) в Фонтенбло (Франция). Модели экономического роста в рамках проблематики устойчивого развития народонаселения и окружающей среды разрабатываются финским экономистом Т. Палокангасом. Приложениями игровых задач управления в экономических, экологических моделях и финансовой математике занимается Дж. Касти из Международного института прикладного и системного анализа (IIASA, Австрия) Р. Авенхаус,

[5] *Arrow, K.J.*, Application of Control Theory to Economic Growth // Mathematics of the Decision Sciences, 1968. No. 2. P. 85-119.

[6] *Kantorovich, L.V., Makarov, V.L.*, Growth Models and their Application to Long-term Planning and Forecasting // In: Long-term Planning and Forecasting, Proc. Conf. Macmillan Press, 1976.

[7] *Schelling, T.C.*, The Strategy of Conflict, Harvard University Press, 1980.

[8] *Grossman, G.M., Helpman, E.*, Innovation and Growth in the Global Economy. MIT Press, Cambridge, MA, 1991.

[9] *Tarasyev, A.M., Watanabe, C.*, Dynamic Optimality Principles and Sensitivity Analysis in Models of Economic Growth // Nonlinear Analysis, 2001. Vol. 47. No. 4. P. 2309-2320.

[10] *Ayres R., Martinas, K.*, On the Reappraisal of Microeconomics. Economic Growth and Change in a Material World, Edward Elgar Publishing, 2005.

С. Пикль из Университета Бундесвера в Мюнхене, Г. Пеш из университета Байрута, а также Г. Фейхтингер, Р. Хартл, Ф. Вирл, Р. Нек из университетов Австрии, Л.А. Петросян из Санкт-Питербургского государственного университета и Дж. Заккур из Международной бизнес-школы (HEC) в Монтреале (Канада).

Актуальным направлением является исследование задач оптимального времени остановки, которые имеют важное приложение в финансовой математике при оптимизации времени коммерциализации в финансовых потоках инновационных проектов. Эти задачи связаны с теорией оптимизации времени остановки процесса в стохастических постановках, развиваемой в работах А.Н. Ширяева [11] и его сотрудников. Для экономических моделей аналогичные задачи рассматривались в работах американских ученых Г. Роббинса, Д. Сигмунда и И. Чао [12]. В статической постановке задачи оптимальной коммерциализации исследовались в работах американского экономиста Й. Барцела [13].

Важное место занимает проблематика построения динамических алгоритмов поиска макроэкономических состояний равновесия, обладающих совмещенными свойствами конкурентного равновесия по Нэшу и оптимальных точек по Парето кооперативного равновесия. Такие постановки восходят к работам Л. Вальраса и Дж. Шумпетера. Они привлекли внимание многих специалистов по макроэкономической теории и моделированию макроэкономических процессов, связанных с теорией игр. Макроэкономические модели и динамические алгоритмы поиска состояний равновесия были развиты в работах таких авторов как П. Нордхаус, Л. Хордайк, А. Нентьес, А. Хаури, Г. Олсдер, Р. Хамалайнен.

Результаты исследований в области теории оптимального управления, дифференциальных игр и соответствующих уравнений Гамильтона-Якоби используются при решении ряда важных прикладных задач в области оптимизации экономического роста, инвестиционных процессов и устойчивого развития окружающей среды.

Цель работы

Цель работы заключается в исследовании свойств оптимальных решений в задачах управления с бесконечным горизонтом; изучении достаточных условий оптимальности в принципе максимума Понтрягина; разработке алгоритмов построения оптимальных траекторий в задачах с кусочно-определенными гамильтонианами; решении задач оптимального времени остановки в многоуровневых динамических моделях; приложении разработанных методов в экономическом моделировании и эконометрическом анализе.

[11] *Ширяев А.Н.*, Основы стохастической финансовой математики. М.: ФАЗИС, 2004. 1056 с.

[12] *Роббинс Г., Сигмунд Д., Чао И.*, Теория оптимальных правил остановки. Перев. с англ. М.: Наука, 1977. 168 с.

[13] *Barzel, Y.*, Optimal Timing of Innovations // The Review of Economics and Statistics, 1968. Vol. 50. No. 3. P. 348-355.

Методы исследования

В основе работы лежат модификации принципа максимума Понтрягина для задач управления с бесконечным горизонтом, методы теории позиционных дифференциальных игр, элементы качественной теории дифференциальных уравнений, конструкции негладкого анализа. При калибровке моделей используются методы статистики и эконометрики.

Научная новизна

Изучены достаточные условия оптимальности, связанные со свойством вогнутости гамильтониана, для принципа максимума Понтрягина в задачах управления с бесконечным горизонтом. Исследованы свойства оптимальных траекторий в окрестности установившихся состояний гамильтоновой системы. Разработан алгоритм построения оптимального управления для задач с кусочно-определенными гамильтонианами. Получены оценки точности построения для предложенного алгоритма, которые устанавливают связь между параметрами точности в фазовом пространстве и параметрами точности функциональных показателей. Изучены свойства функции цены в многоуровневых задачах оптимизации. Разработан алгоритм построения управления по выбору оптимального времени остановки динамического процесса. Предложенные алгоритмы реализованы в моделях экономического роста и оптимизации инвестиций.

Теоретическая и практическая ценность

Полученные в работе теоретические результаты направлены на исследование задач управления с бесконечным горизонтом. Эти результаты могут быть использованы для качественного анализа динамических свойств и свойств установившихся состояний гамильтоновых систем. Выполненные исследования позволяют конструировать алгоритмы построения оптимальных траекторий и оценивать их точность. Предложенные алгоритмы могут быть использованы для построения решений в экономических моделях роста и оптимизации инвестиций. Практическая ценность работы состоит в том, что полученные результаты и разработанные алгоритмы могут быть применены в эконометрическом моделировании. В частности, предложенные конструкции были применены в моделях экономического роста с различными типами производственных функций. Результатом этого моделирования явился качественный анализ синтезированных модельных траекторий, который может быть использован при прогнозировании экономического развития. Анализ свойств функций цены и оптимального времени остановки динамических процессов может быть использован при моделировании инвестиционных процессов. В частности, проведено моделирование оптимальной инвестиционной стратегий для инновационных технологических процессов.

Апробация работы

Основные результаты диссертации докладывались на всероссийских и международных конференциях “Информационно-математические технологии в экономике, технике и образовании” (УГТУ-УПИ, Екатеринбург, 2005-2007 гг.), на научном семинаре “Математическая теория оптимального управления и теория дифференциальных включений” (МИРАН-МГУ, Москва, 12-13 октября 2006 г.), конференции “Устойчивость, управление и моделирование динамических систем”, (УрГУПС, Екатеринбург, 15-17 ноября 2006 г.), на международной конференции “Дифференциальные уравнения и смежные вопросы” (XXII совместное заседание Московского математического общества и семинара им. А.Г. Петровского, МГУ, Москва, 21-26 мая 2007 г.), the 14th International Workshop on Dynamics and Control (Institute for Problems in Mechanics and Steklov Mathematical Institute of the Russian Academy of Sciences, Moscow-Zvenigorod, 2007), the 7th International EUROGEN’2007 Conference “Evolutionary and Deterministic Methods for Design, Optimization and Control with Applications to Industrial and Societal Problems”, (University of Jyväskylä, Finland, June 11-13, 2007), The 22nd European Conference on Operational Research - EURO XXII (University of Economics, Prague, Czech Republic, July 8-12, 2007), IIASA-Tokyotech Workshop on Hybrid Management of Technology in the 21st Century (International Institute for Applied Systems Analysis, Laxenburg, Austria, September 8-9, 2007), the 11th IFAC Symposium “Computational Economics & Financial and Industrial Systems” – CEFIS’2007 (Doğuş University of Istanbul, Turkey, October 9-11, 2007), семинарах кафедры “Мультимедиа технологии” факультета ИМТЭМ, УГТУ-УПИ, семинарах отдела динамических систем ИММ УрО РАН, семинарах кафедры оптимального управления факультета ВМК МГУ им. М.В. Ломоносова, г. Москва, семинарах по экономическому росту Международного института прикладного и системного анализа, IIASA, г. Лаксенбург, Австрия.

Публикации

Основные материалы диссертации опубликованы в 17 работах. В совместных работах [1]-[8], [11]-[17] научному руководителю А.М. Тарасьеву принадлежит постановка задач. В работах в соавторстве [13], [15] А.В. Кряжимскому принадлежит постановка задач. В совместной работе [17] Ч. Ватанабе предоставил экономические данные.

Структура и объем работы

Диссертация состоит из введения, трех глав и списка литературы. Главы разбиты на параграфы. Нумерация глав, параграфов и утверждений сквозная. Объем работы составляет 130 страниц текста. Библиография содержит 190 наименований.

СОДЕРЖАНИЕ И ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ РАБОТЫ

Первая глава диссертации посвящена задачам управления с вогнутыми гамильтонианами на бесконечном горизонте. Она состоит из семи параграфов.

В первом параграфе строится модель оптимального управления на бесконечном горизонте. Такие модели возникают в задачах экономического роста. Обсуждается вариант модели Солоу-Шелла оптимального инвестирования. Описываются основные переменные, включая управляющие параметры модели. Формулируется задача оптимального управления инвестициями.

Задача управления. В стандартной постановке задача состоит в максимизации функционала

$$J = \int\limits_0^{+\infty} \Big[\ln f\big(k(t)\big) + \ln\big(1 - s(t)\big)\Big] e^{-\delta t} dt \underset{(k(\cdot), s(\cdot))}{\longrightarrow} \max \tag{1}$$

при следующих ограничениях:

$$\dot{k}(t) = s(t) f(k(t)) - \lambda k(t), \quad k(0) = k^0, \quad s \in [0, a], \quad a < 1, \tag{2}$$

где фазовая переменная k обозначает капитал на душу населения, $f(k)$ – производственная функция, инвестиции s есть управляющая переменная, измеримая по времени, параметры δ, $\lambda = n + \mu$, k^0 суть заданные положительные числа. Параметр $0 < a < 1$ есть положительное число, которое отделяет правую границу параметра управления от единицы.

Во втором параграфе приводятся необходимые условия принципа максимума Понтрягина для задач с бесконечным горизонтом, развитые в работах С.М. Асеева и А.В. Кряжимского. Исследуются свойства гамильтонианов, отвечающих различным режимам управления. Показано, что при достаточно общих условиях максимизированный гамильтониан является гладкой функцией. При условии строгой вогнутости производственной функции на основе методов выпуклого анализа [14] установлено, что максимизированный гамильтониан является строго вогнутой функцией по фазовой переменной. Именно, максимизированный гамильтониан склеивается из нескольких гладких строго вогнутых частей таким образом, что результат склейки является гладким и строго вогнутым по фазовой переменной. Дано описание областей, отвечающих разным режимам формирования оптимального управления, и определены линии склейки этих областей. Получены достаточные условия оптимальности траекторий роста для класса систем с вогнутыми производственными функциями.

Теорема 1 *При выполнении условий лемм, обеспечивающих свойства гладкости максимизированного гамильтониана $\hat{H}(k, \psi)$ по переменным (k, ψ) и его строгой вогнутости по переменной k, принцип максимума Понтрягина дает достаточные условия для нахождения оптимального решения в задаче управления* (1)-(2).

В третьем параграфе доказано существование и единственность установившегося состояния гамильтоновой системы. Выполнен анализ свойств собственных чисел и собственных векторов линеаризованной системы в окрестности установившегося состояния. Дано описание поведения нелинейной гамильтоновой системы на основе результатов качественной теории дифференциальных уравнений [15]. Этот анализ позволяет описать пропорции основных экономических факторов и тренды оптимального роста.

[14] *Рокафеллар Р.Т.*, Выпуклый анализ. М.: Мир, 1973. 469 с.
[15] *Hartman, Ph.*, Ordinary Differential Equations. N.Y., London, Sydney: J. Wiley and Sons, 1964.

Лемма 1 *Существует единственное установившееся состояние* (k^*, z^*) *гамильтоновой системы уравнений, которое вычисляется по формулам:*

$$\begin{cases} f'(k^*) = \delta + \lambda, \\ \dfrac{1}{z^*} = \dfrac{f(k^*)}{k^*} - \lambda. \end{cases} \tag{3}$$

При этом справедливы оценки

$$k^* > 0, \quad 0 < z^* < \frac{1}{\delta}. \tag{4}$$

Здесь $z = k\psi$, ψ – сопряженная переменная.

В четвертом параграфе на основе анализа, выполненного во втором и третьем параграфах, предлагается алгоритм построения оптимальной траектории методом склейки динамики гамильтоновых систем. Алгоритм состоит из следующих шагов:

- численная оценка установившегося состояния гамильтоновой системы методом последовательных приближений;
- линеаризация гамильтоновой системы в окрестности установившегося состояния;
- вычисление собственных чисел и собственных векторов линеаризованной системы;
- построение куска траектории из установившегося состояния в направлении собственного вектора, отвечающего отрицательному собственному числу;
- интегрирование нелинейной гамильтоновой системы в обратном времени от характеристического состояния с учетом переключения кусочно-определенных гамильтонианов до начального состояния системы;
- развертка интегрированной траектории в прямом времени и масштабирование временной шкалы.

В пятом параграфе получены оценки точности построения для предложенного алгоритма, которые устанавливают связь между параметрами точности в фазовом пространстве и параметрами точности функциональных показателей.

Теорема 2 *Точность алгоритма по функционалу оценивается точностью аппроксимации* ε *начальных условий в алгоритме. В зависимости от соотношений параметров оценок роста возможны три случая оценки:*

- *в случае, когда модуль липшицевости динамики системы строго меньше параметра дисконтирования, точность алгоритма по функционалу имеет порядок* ε^2*;*

- *в случае, когда модуль липшицевости динамики системы совпадает с параметром дисконтирования, точность алгоритма по функционалу имеет порядок* $\varepsilon^2 \ln \dfrac{1}{\varepsilon^2}$*;*

- *в случае, когда модуль липшицевости динамики системы строго больше параметра дисконтирования, точность алгоритма по функционалу имеет порядок* $\varepsilon^{\frac{2}{\beta+1}}$*, где* $\beta > 0$*.*

В шестом параграфе рассматривается вопрос о стабилизации системы в установившемся состоянии. Для этого предлагаются несколько алгоритмов управления по принципу обратной связи, которые стабилизируют систему. Выделяются два основных типа таких регуляторов. Первый регулятор связан со значением оптимального управления в установившемся состоянии, поэтому мы будем называть его регулятором установившегося состояния. Второй регулятор основан на аппроксимации оптимальной траектории в направлении собственного вектора, отвечающего отрицательному собственному числу линеаризованной гамильтоновой системы, в окрестности установившегося состояния. Второй регулятор будем называть регулятором гамильтоновой системы.

Лемма 2 *Регулятор*

$$s^0(k^*) = \lambda \frac{k^*}{f(k^*)} \tag{5}$$

стабилизирует систему в установившемся состоянии.

Лемма 3 *Регулятор гамильтоновой системы*

$$s^0 = 1 - \frac{k}{(z^* + \omega(k - k^*))f(k)} \tag{6}$$

стабилизирует систему в установившемся состоянии. Здесь ω *есть коэффициент наклона собственного вектора, отвечающего отрицательному собственному значению линеаризованной гамильтоновой системы в окрестности установившегося состояния.*

В седьмом параграфе приведены вычислительные эксперименты, основанные на реальных данных и иллюстрирующие конструкции алгоритма.

На рис. 1-6 изображены результаты вычислительных экспериментов: на рис. 1 показана конфигурация областей определения максимизированного гамильтониана и линий склейки; на рис. 2 изображен трехмерный график значений максимизированного гамильтониана; на рис. 3 иллюстрируется алгоритм построения оптимальной траектории, выходящей из установившегося состояния; на рис. 4 показаны значения Оптимальных инвестиций для двух режимов оптимального управления; на рис. 5 проведено сравнение оптимальных траекторий роста капитала с реальными данными; на рис. 6 проведено

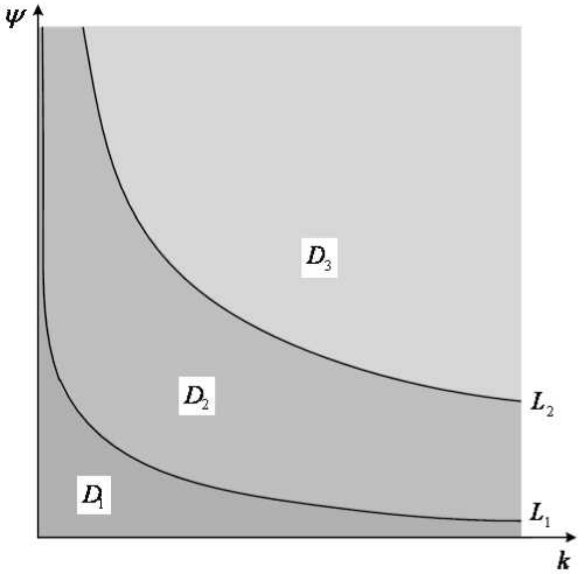

Рис. 1. Конфигурация областей максимизированного гамильтониана

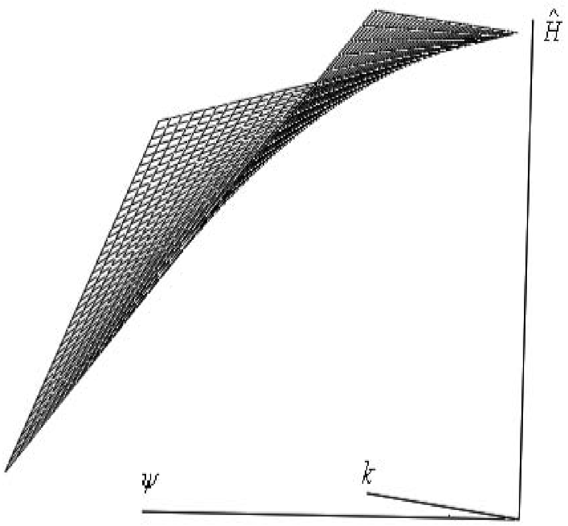

Рис. 2. График максимизированного гамильтониана

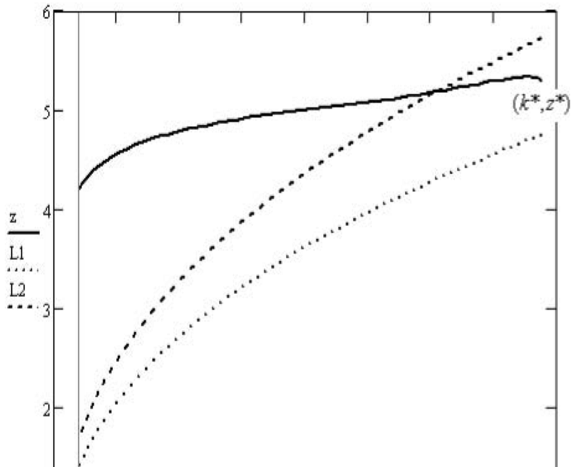

Рис. 3. Установившееся состояние и оптимальная траектория

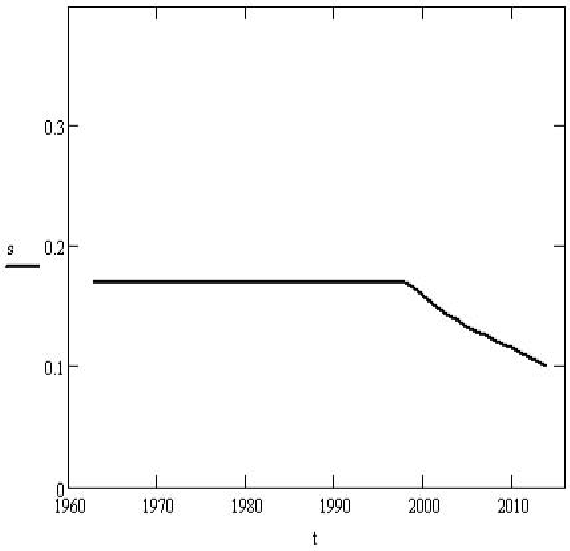

Рис. 4. Оптимальные инвестиции

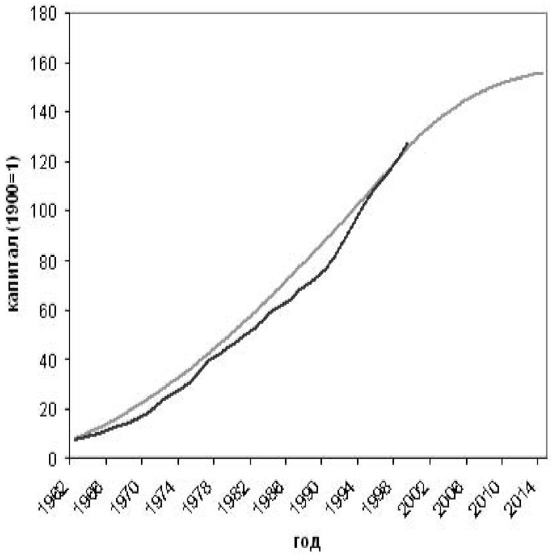

Рис. 5. Сравнение траекторий роста капитала

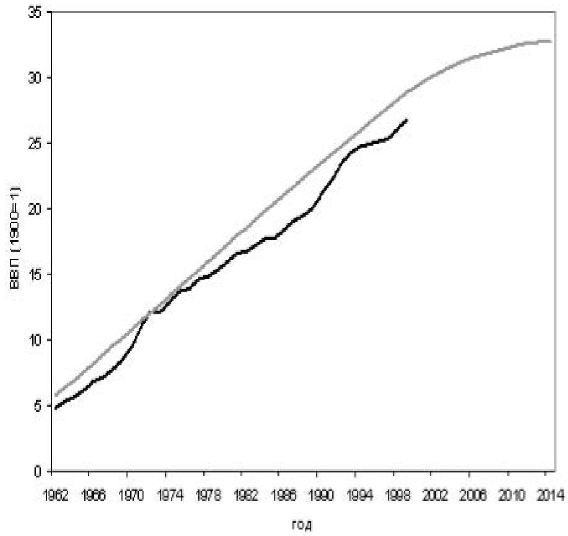

Рис. 6. Сравнение оптимальных траекторий роста объемов производства

сравнение оптимальных траекторий роста объемов производства с реальными данными для экономики Японии.

Во **второй главе** рассматривается задача оптимизации инвестиций в процессе экономического роста для модели с производственной функцией специального вида, которая называется линейно-экспоненциальной (LINEX) производственной функцией. Вторая глава состоит из пяти параграфов.

В первом параграфе предлагается методологическая схема для исследования моделей экономического роста. Отличительной чертой предлагаемой методологии является то, что анализ роста экономики основан не на прямой аппроксимации реальных макроэкономических данных. Эконометрическому анализу подвергаются только параметры производственной функции. Далее на основе этой функции строится математическая модель инвестирования и решается побочная задача оптимального управления на бесконечном горизонте. В результате решения задачи оптимального управления численно строятся траектории оптимального роста. Проводя сравнение полученных синтезированных оптимальных траекторий модели с трендами реальных данных, можно судить об адекватности выбранной модели. Такой подход позволяет рассматривать экономический рост как динамический процесс и выявлять некоторые закономерности, движущие экономикой. Конструкция методологической схемы указана на рис. 7.

Рис. 7. Методологическая схема.

Во втором параграфе рассматривается линейно-экспоненциальная (LINEX) производственная функция, используемая для анализа макроэкономических показателей США. Для калибровки производственной функции выполняется эконометрический анализ, включающий нелинейные регрессии с ограничениями на параметры. Особенностями этого анализа является выявленная авторегрессионная зависимость в данных. В связи с этим эффектом делается коррекция обобщенного метода наименьших квадратов для авторегрессии с почти единичным корнем.

Исследование выполняется для LINEX производственной функции, представленной выражением

$$F(K, L, U) = a_0 K^{a_1} L^{a_2} U^{(1-a_1-a_2)} \exp\left\{a_3 \frac{K}{L} + a_4 \frac{L}{U} + a_5 \frac{U}{K}\right\}. \qquad (7)$$

Здесь K – капитал, L – труд, U – полезная работа, $a_i, i = 0, 1, .., 5$ – постоянные коэффициенты. Можно заметить, что в отличие от классических производственных функций, таких как функция Кобба-Дугласа, производственная функция с постоянной эластичностью предельной нормы замещения и т.п., LINEX производственная функция наряду со степенной частью имеет экспоненциальный множитель, содержащий комбинацию дробей из производственных факторов.

Эконометрический анализ выполнен на данных по экономике США при условии, что коэффициенты эластичности неотрицательны. Временные ряды по ВВП и производственным факторам представлены значениями за каждый год в течение 101 года (1900-2001 гг.). Значения всех переменных приведены на 1900 г. Иллюстрация данных приведена на рис. 8. Полезная работа измеряется в экзаджоулях (ЭДж=10^{18} Дж); уровень полезной работы в 1900 г. составлял 0,64 ЭДж. Труд измеряется в индексе отработанных часов. Капитал измеряется в денежном эквиваленте (миллиарды долларов США); уровень капитала в 1900 г. был \$ 2021 млрд. Символом Y обозначен ВВП, в 1900 г. уровень ВВП составлял \$ 354 млрд.

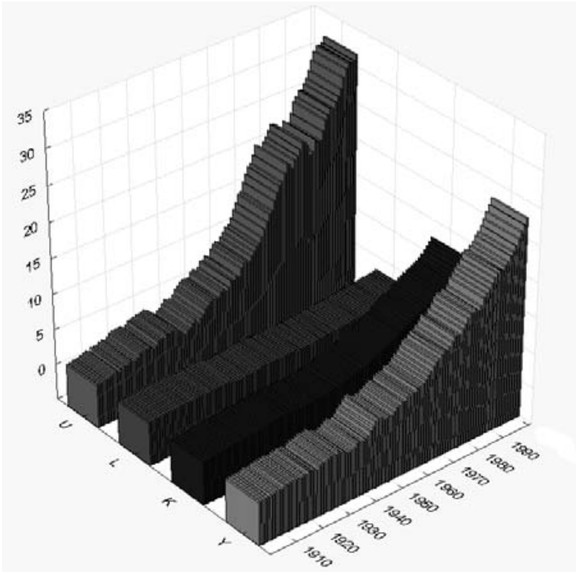

Рис. 8. Данные по экономике США (1900-2001)

В третьем параграфе рассматривается математическая модель, основанная на модификации классических моделей экономического роста. Выделяются три основных производственных фактора: капитальные затраты (капитал), затраты на рабочую силу (труд) и полезная работа. Эти производственные факторы используются для описания однородного выпуска внутреннего валового продукта (ВВП) и являются фазовыми переменными управляемой системы. Инвестиции в капитал специфицируются как управляющие параметры. Функция полезности определяется как интегральный индекс потребления логарифмического типа, дисконтированный на бесконечном интервале времени. Формулируется задача оптимального управления на бесконечном горизонте. Задача состоит в максимизации дисконтированного функционала при заданных ограничениях на управляющие параметры и начальных значениях фазовых переменных. Решение задачи оптимального управления основано на результатах первой главы диссертации и осуществляется в рамках принципа максимума Понтрягина для задач с бесконечным горизонтом.

В четвертом параграфе для доказательства локальной оптимальности траектории, полученной в модели с LINEX производственной функцией, выполняется анализ векторного поля соответствующей гамильтоновой системы в принципе максимума Понтрягина. Показано, что оптимальная траектория, выходящая из начального состояния и удовлетворяющая условию трансверсальности на бесконечном горизонте, сходится к установившемуся состоянию. Качественный портрет векторного поля изображен на рис. 9 и показывает скорости гамильтоновой системы, направляющие оптимальную траекторию в установившееся состояние.

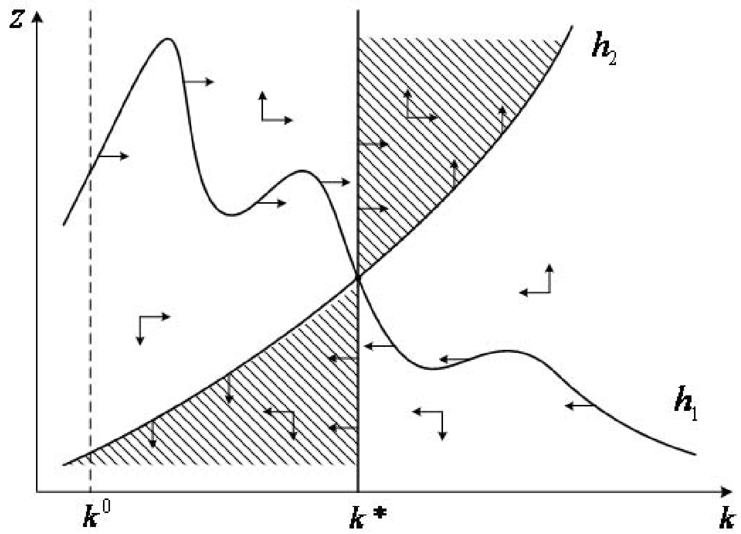

Рис. 9. Векторное поле гамильтоновой системы.

В шестом параграфе представлены результаты вычислительного эксперимента для модели с линейно-экспоненциальной (LINEX) производственной функцией. Получен график оптимальных инвестиций и выполнено сравнение синтезированных траекторий оптимального экономического роста с реальными данными. На основе этого сравнения дан качественный анализ свойств оптимальных траекторий роста и выполнено прогнозирование роста. В частности, результаты моделирования и прогнозирования демонстрируют S-образную форму траекторий роста и указывают уровни насыщения роста, порожденные устойчивыми состояниями экономической системы.

На рис. 10 оптимальная траектория роста капитала на одного рабочего изображена темной линией, а реальные данные по экономике США изображены серой линией. Видно, что полученная синтезированная траектория адекватно отражает тренды реальных данных. Стоит заметить, что оптимальная траектория даже отслеживает реструктуризацию данных в послевоенный экономический кризис.

В седьмом параграфе предложенный подход реализуется для двухфакторных моделей экономического роста. Рассматривается модель с ростом полезной работы как экзогенного фактора производства. Получены оптимальные траектории для двухфакторной модели и выполнено сравнение с реальными данными.

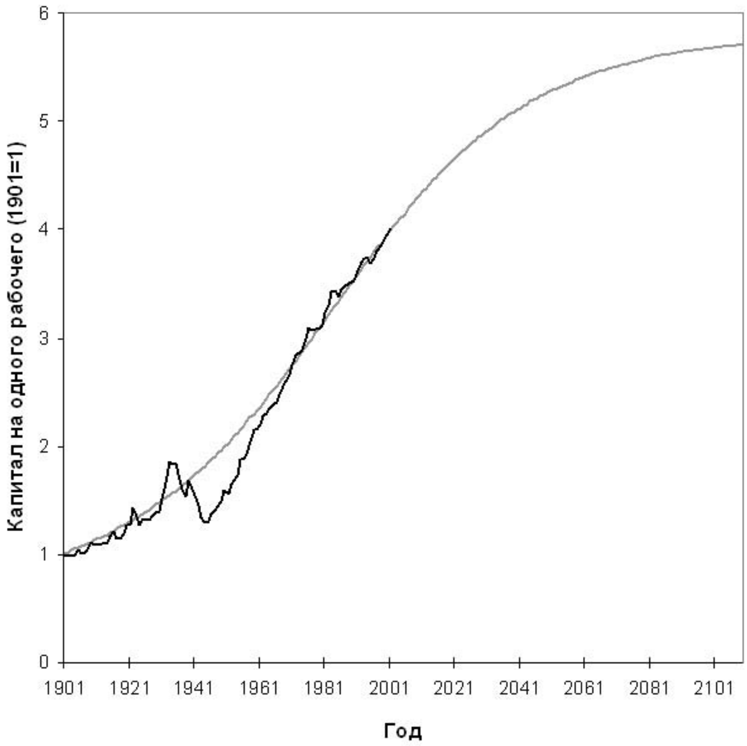

Рис. 10. Сравнение оптимальной траектории с реальными данными.

В **третьей главе** рассматривается приложение динамической модели оптимального времени остановки к задаче оптимизации инновационного процесса в конкурентоспособной рыночной среде. Третья глава состоит из шести параграфов.

В первом параграфе строится динамическая модель инновационного процесса, осуществляемого в рыночной среде. Модель сфокусирована на трех задачах: (1) оценка динамики рынка, (2) оптимизация времени коммерциализации, (3) синтез оптимального инвестиционного сценария. Динамика с эффектом запаздыванием адаптируется для описания управляемого процесса инвестирования. Построение функционалов прибыли и затрат основано на интегральной функции платы в задаче оптимального управления с коэффициентами дисконтирования. При описании динамики рынка используется вероятностно-статистическая модель. Вероятность присутствия технологических конкурентов на рынке определяется функцией распределения, которая строится на основании эконометрического анализа [16]. Доказывается, что решение задачи оптимизации может быть разбито на два уровня: на первом уровне производится синтез обратной связи и вычисляются функции цены; на втором уровне оптимизируется функция прибыли по времени остановки.

В задаче оптимального инвестирования предполагается, что текущий фонд нематериальных активов подчинен динамике роста с запаздыванием и эффектами устаревания

$$\dot{x}(t) = -\sigma x(t) + r_a^{\gamma}(t). \qquad (8)$$

Здесь параметр $\sigma > 0$ – коэффициент устаревания (амортизации) техноло-

[16] *Айвазян С.А., Мхитарян В.С.*, Прикладная статистика и основы эконометрики. М.: ЮНИТИ, 1998. 1022 с.

гии, параметр управления r_a^γ – инвестиции в НИР (измеряемые в денежном эквиваленте), параметр $\gamma, 0 < \gamma < 1$ – коэффициент эффективности затрат.

Инноватор, начинающий процесс инновации в момент времени t_0 с начального уровня x_0 фонда нематериальных активов $x(t)$, должен достигнуть ко времени коммерциализации t_a уровня фонда нематериальных активов x_a, $x_a > x_0$, который является необходимым для запуска процесса коммерциализации разработанной технологии. В инвестиционном процессе задачей инноватора является минимизация инвестиционных затрат

$$J(t_0, x_0, t_a, x_a, r_a(\cdot), \gamma, \lambda, \sigma) = \int_{t_0}^{t_a} e^{-\lambda s} r_a(s) ds,$$
$$r_a = r_a(s) = r_a(s, t_0, x_0, t_a, x_a, \gamma, \lambda, \sigma). \tag{9}$$

Здесь параметр $\lambda > 0$ – постоянный коэффициент дисконтирования, а функционал (9) представляет приведенную стоимость инвестиционного финансового потока (NPV).

Во втором параграфе рассматривается задача синтеза оптимального уровня инвестиций. На основе принципа максимума Понтрягина строится оптимальный план для стратегии инвестирования, который зависит от начального и конечного уровня фонда нематериальных активов. Выполняется анализ свойств оптимального управления и оптимальных траекторий системы, включая анализ чувствительности по параметрам модели. Строится оптимальная обратная связь, которая базируется на текущем состоянии фонда нематериальных активов и генерирует оптимальные траектории роста технологии. В результате решения получается множество функций затрат, зависящих от моментов времени остановки. Исследуются асимптотические свойства функции затрат.

Выражение для оптимального плана инвестирования имеет вид

$$u^0 = u^0(s, t_0, x_0, t_a, x_a, \alpha, \lambda, \sigma) = \frac{(x_a e^{(t_a - s)\sigma} - x_0 e^{-(s - t_0)\sigma})\rho}{(e^{(t_a - s)\rho} - e^{-(s - t_0)\rho})}. \tag{10}$$

Здесь функция $\rho = \rho(\alpha, \lambda, \sigma)$ задана соотношением

$$\rho = \rho(\alpha, \lambda, \sigma) = \frac{(\alpha\sigma + \lambda)}{(\alpha - 1)}. \tag{11}$$

Замечание 1 *Оптимальный план инвестирования $u^0(s)$ есть экспоненциально растущая функция времени s на временном отрезке $[t_0, t_a]$ с темпом роста $(\lambda + \sigma)/(\alpha - 1)$.*

В третьем параграфе доказываются достаточные условия оптимальности полученного решения на основании исследования свойства стабильности функции цены в задаче оптимального управления. Доказывается, что предложенная разрешающая функция является полунепрерывной снизу и удовлетворяет уравнению Гамильтона-Якоби-Беллмана в точках дифференцируемости. На основании этого устанавливается, что она обладает свойством

u-стабильности. Кроме того, проверяются условия теоремы об альтернативе Н.Н. Красовского, А.И. Субботина посредством построения последовательности v-стабильных полунепрерывных сверху функций, аппроксимирующих снизу разрешающую функцию. Окончательно делается вывод о том, что разрешающая функция является функцией цены для задачи оптимального управления.

Теорема 3 *Функция $(t, x) \to w^0(t, x)$ есть полунепрерывная снизу функция по (t, x), является u-стабильной в области D^0 и удовлетворяет краевому условию при $t = t_a$. Кроме того, для любой точки $(\tau, y, \varphi) \in \operatorname{int} \operatorname{hypo} w^0$: $\varphi < w^0(\tau, y)$ из внутренности подграфика функции $(t, x) \to w^0(t, x)$ найдется полунепрерывная сверху, v-стабильная функция $(t, x) \to v(t, x)$, такая что для нее выполняются следующие два условия:*

$$\varphi \leq v(\tau, y); \tag{12}$$

$$v(t, x) \leq w^0(t, x) \quad \text{при всех} \quad (t, x) \in [\tau, t_a] \times R. \tag{13}$$

Поэтому, согласно теореме об альтернативе функция $(t, x) \to w^0(t, x)$ является функцией цены в задаче управления, что обеспечивает необходимые и достаточные условия оптимальности построенных решений.

В четвертом параграфе решается задача выбора инвестиционного сценария и оптимизации времени коммерциализации. Доказано, что экстремумы функции прибыли соответствуют точкам пересечения двух функций, одна из которых является функцией распределения рынка, а другая описывается кривой предельных затрат инвестиционного процесса. Использованы конструкции супердифференциалов для исследования свойств точек экстремума для моделей с кусочно-гладкими функциями распределения рынка. На основании этого анализа предложен алгоритм построения оптимальной стратегии инвестирования. Структура алгоритма состоит в следующих шагах:

- построение функции цены для задачи оптимального управления для инвестиционного уровня;
- вероятностное моделирование функции распределения, описывающей состояние рынка;
- определение точек пересечения функции предельных затрат и функции распределения для оценки оптимального времени остановки;
- выбор оптимального сценария и отслеживание его по принципу обратной связи.

В пятом параграфе выполняется калибровка параметров модели для реализации вычислительных экспериментов. Проведен эконометрический анализ модели на данных для компаний электронного машиностроения Японии, в частности, анализа рынка принтеров на примере фирмы Canon.

В шестом параграфе приведены результаты вычислительных экспериментов, реализующих алгоритм построения оптимального времени коммерциализации для различных функций распределения рынка. В первый примере для описания рынка выбрана модельная кусочно-непрерывная функция распределения типа Хэвисайда (см. рис. 11). Во втором примере эксперимент выполнен для экспоненциального распределения рынка, калиброванного по данным. Элементы алгоритма иллюстрируются результатами вычислительных экспериментов.

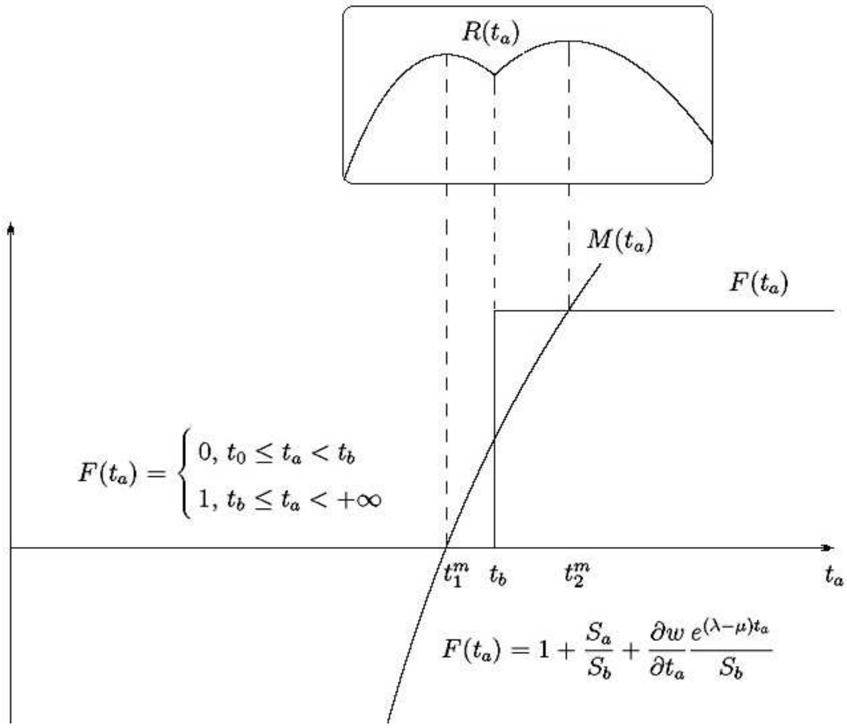

Рис. 11. Точки максимума функции прибыли.

Основные результаты диссертации

1. Изучены достаточные условия оптимальности, связанные со свойством вогнутости гамильтониана, для принципа максимума Понтрягина в задачах управления с бесконечным горизонтом. Исследованы свойства оптимальных траекторий в окрестности установившихся состояний гамильтоновой системы.

2. Разработан алгоритм построения оптимального управления для задач с кусочно-определенными гамильтонианами. Получены оценки точности построения для предложенного алгоритма, которые устанавливают связь между параметрами точности в фазовом пространстве и параметрами точности функциональных показателей. Предложены конструктивные формулы построения нелинейных регуляторов для динамической системы роста.

3. Изучены свойства функции цены в многоуровневых задачах оптимизации. Предложен алгоритм построения управления по выбору оптимального времени остановки динамического процесса.

4. Предложенные алгоритмы реализованы в моделях экономического роста и оптимизации инвестиций, для которых проведен эконометрический анализ на реальных данных.

Работа поддержана грантами Российского фонда фундаментальных исследований, 05-01-00601, 05-01-08034; грантом Российского гуманитарного научного фонда, 05-02-02118а; грантом поддержки ведущих научных школ, НШ-8512.2006.1; грантом Фонда содействия отечественной науке (грант для аспирантов РАН, 2006-2007 г.г.); грантом Президиума Уральского отделения РАН (грант для молодых ученых, 2006 г.); грантом программы "SIMOT" Министерства образования, науки и технологии Японии; Международным институтом прикладного системного анализа (IIASA).

СПИСОК ПУБЛИКАЦИЙ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

Статьи, опубликованные в ведущих рецензируемых научных журналах

1. Красовский А.А., Тарасьев А.М., Специальные статистические распределения в динамической модели инновационного процесса // Вестник Уральского государственного технического университета – УПИ, 2006. № 6 (77). С. 17-33. усл. печ. л. 1,03.

2. Красовский А.А., Тарасьев А.М., Динамическая оптимизация инвестиций в моделях экономического роста // Автоматика и телемеханика, 2007. № 10. С. 38-52. усл. печ. л. 1,22.

Другие публикации

3. Красовский А.А., Тарасьев А.М., Динамические модели и эконометрический анализ в бизнес-планировании // Вестник Гуманитарного университета, 2005. Т. 1 (6). С. 35-73.

4. Красовский А.А., Тарасьев А.М., Моделирование оптимального экономического роста // Тезисы докладов научного семинара "Математическая теория оптимального управления и теория дифференциальных включений", Москва: МИРАН-МГУ, 2006. С. 26.

5. Красовский А.А., Тарасьев А.М., Оценивание производственных факторов в задаче оптимального экономического роста // Тезисы докладов конференции "Устойчивость, управление и моделирование динамических систем", Екатеринбург: УрГУПС, 2006. С. 48.

6. Красовский А.А., Тарасьев А.М., Алгоритмы построения оптимальных траекторий в моделях экономического роста // Тезисы докладов Международной конференции "Дифференциальные уравнения и смежные вопросы" (XXII совместное заседание Московского математического общества и семинара им. А.Г. Петровского), М.: Изд-во МГУ, 2007. С. 164.

7. Красовский А.А., Тарасьев А.М., Прогнозирование оптимального экономического роста // Сборник материалов Международной научной конференции "Информационно-математические технологии в экономике, технике и образовании": Проблемы математического моделирования и информационно-аналитической поддержки принятия решений, 2007. Вып. 3. С. 10-18.

8. Красовский А.А., Тарасьев А.М., Оптимизация времени остановки в многоуровневых динамических системах // Вестник Удмурдского университета, Вып. 2, 2008. С. 64-65.

9. Krasovskii, A.A., Assessment of the Impact of Aggregated Economic Factors on Optimal Consumption in Models of Economic Growth // IIASA Working Paper IR-06-050, Laxenburg: IIASA, 2006. 46 P.

10. Krasovskii, A.A., Dynamics of Investments to Efficiency Factors in the Growth Model with the LINEX Production Function // Proceedings of the IIASA-Tokyotech Workshop on Hybrid Management of Technology in the 21st Century, International Institute for Applied Systems Analysis, Laxenburg, 2007. P. 7.

11. Krasovskii, A.A., Tarasyev, A.M., Assessment of Sensitivity of Stochastic Solutions in the Problem of Optimal Timing // Proceedings of IFAC-IIASA Workshop "New Approaches in Dynamic Optimization to Assessment of Economic and Environmental Systems", Laxenburg: IIASA, 2006.

12. Krasovskii, A.A., Tarasyev, A.M, Optimization of Investment Dynamics in Economic Growth Modeling // Abstracts of the 14th International Workshop on Dynamics and Control, Institute for Problems in Mechanics and Steklov Mathematical Institute of the Russian Academy of Sciences, Moscow-Zvenigorod, 2007. P. 46.

13. Krasovskii, A., Kryazhimskiy, A., Tarasyev, A., Optimal Control Design in Models of Economic Growth // Programme and Abstracts of the 7th International EUROGEN'2007 Conference "Evolutionary and Deterministic Methods for Design, Optimization and Control with Applications to Industrial and Societal Problems", University of Jyväskylä, 2007. P. 16-17.

14. Krasovskii, A., Tarasyev, A., Modeling of Optimal Trends for Dynamic Systems on Infinite Horizon // Abstracts of the 22nd European Conference on Operational Research - EURO'XXII, University of Economics, Prague, 2007. P. 167.

15. Krasovskii, A., Kryazhimskiy, A., Tarasyev, A., Optimal Control Design in Models of Economic Growth // Evolutionary Methods for Design, Optimization and Control (P. Neittaanmäki, J. Périaux and T. Tuovinen, Eds.), CIMNE, Barcelona, Spain, 2007.

16. Krasovskii, A.A., Tarasyev, A.M., Problems of Optimal Timing Control // Proceedings of the 11th IFAC Symposium "Computational Economics & Financial and Industrial Systems" - CEFIS'2007 (G.M. Dimitrovski and F. Ulengin, Eds.), Doğuş University of Istanbul, 2007. P. 75-80.

17. Krasovskii, A., Tarasyev, A., Watanabe, C., Assessment of the Market Development Trajectory for Optimal Timing of Technological Innovation // IIASA Working Paper IR-08-007, Laxenburg: IIASA, 2008. 36 P.

Подписано в печать 17.04.2008
Формат 60×84 1/16. Объем 1,5 п.л.
Тираж 120 экз.
Размножено с готового оригинал-макета
в копировально-множительном бюро
Правительства Свердловской области
620031, пл. Октябрьская, 1, г. Екатеринбург